

rref

Lagebeziehungen

Lineare Gleichungssysteme

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt
Gerade mit Geraden

$$\text{I} \quad -3 + 8r = -2 + 2s$$

$$\text{II} \quad 19 + 6r = 1 - 6s$$

$$\text{III} \quad 6 - 12r = 2 - 4s$$

gleichsetzen

$$\text{Ia} \quad 8r - 2s = 1$$

$$\text{IIa} \quad 6r + 6s = -18$$

$$\text{IIIa} \quad -12r + 4s = -4$$

Unbekannte auf eine Seite

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 6 & 6 & -18 \\ -12 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Matrix für rref

$$\text{rref} \leadsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & -2,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r = -0,5$$

$$s = -2,5$$

$$0 = 0 \quad (\text{kein Widerspruch})$$

r oder s in eine entsprechende Gleichung einsetzen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix} + (-0,5) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

dh Schnittpunkt bei $S(-7 | 16 | 12)$

Ohne GTR:

1) Lösung der ersten beiden Gl.

2) In 3. Gl. einsetzen zur Probe

Schnittpunkt Ebene und Gerade bzw Durchstoßpunkt

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad -2 + 4r + 2s = 6 - 2t$$

$$\text{II} \quad 6 + 3r - 4s = 4 - 3t$$

$$\text{III} \quad -2 + r + 3s = 2 - 2t$$

$$\text{I}_a \quad 2t + 4r + 2s = 8$$

$$\text{II}_a \quad 3t + 3r - 4s = -2$$

$$\text{III}_a \quad 2t + r + 3s = 4$$

$$\begin{array}{ccccccc} & t & r & s & = & & \\ \text{ref} & & & & & & \\ \leadsto & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,75 \\ 0 & 1 & 0 & 1,75 \\ 0 & 0 & 1 & 1,25 \end{bmatrix} & & t = -0,75 \\ & & & & & r = 1,75 \\ & & & & & s = 1,25 \end{array}$$

r & s in E oder (geschickter) t in g :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (-0,75) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 6,25 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

Durchstoßpunkt: $DC(7,5 \mid 6,25 \mid 3,5)$

Windschiefe Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren sind nicht linear abhängig.

Gleichsetzen:

$$\text{I} \quad 5 + r = 2 - 3s$$

$$\text{II} \quad 4 + 1,5r = 6 - 4s$$

$$\text{III} \quad 11 + 2r = 2 - 5s$$

$$\text{I}_a \quad 3s + r = -3$$

$$\text{II}_a \quad 4s + 1,5r = 2$$

$$\text{III}_a \quad 5s + 2r = -9$$

$$\xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} s = 0 \\ r = 0 \\ 0 = 1 \end{array} \quad \text{Widerspruch!}$$

Kein Schnittpunkt!

Selten: Gerade liegt in Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen:

$$I \quad -1 + r + 2s = 3 - 3t$$

$$II \quad -15 + 5r + 6s = -7 - 7t$$

$$III \quad -1 + 9r + 10s = 11 - 11t$$

$$I_a \quad 3t + r + 2s = 4$$

$$II_a \quad 7t + 5r + 6s = 8$$

$$III_a \quad 11t + 9r + 10s = 12$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \text{ref} \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{cccc} & t & r & s & = \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0,5 & 1,5 \\ 0 & 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} t + 0,5s = 1,5 \\ r + 0,5s = -0,5 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{unendl. viele Lösungen} \\ (\text{kein Widerspruch}) \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme mit GTR

15.8.24

Lässt sich der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schreiben?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad r=2, s=-1$$

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{GTR magic}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste Zeile: $r = 2$

Zweite Zeile: $s = -1$

Probe!

$\uparrow$
 r
 $\uparrow$
 s
 $\uparrow$
 $=$

GTR: Lineare Gleichungssysteme mit dem GTR lösen

- Run Math
- F3 (Mat_{rix}), (ähnlich wie Graph Menü)
- Enter, Dimensionen Zeilen (m) x Spalten (n)
- hier $m = 3$, $n = 4$)
- Zahlen eingeben, 2x Exit (zurück in Run Math)
- OPTN, F2 (Mat_{rix}), F6 ($\triangleright$), F5 (Rref)
- OPTN, F2 (Mat_{rix}), F1 (Mat_{rix}), ODER SHIFT, 2
- ALPA, A (Buchstabe der Matrix)
- Lösung interpretieren (üben wir!)

Aufgaben: S. 235 (dickes Buch), A2 (mit GTR)

Aufgaben

S. 234, Beispiel

S. 235, 1, 2, 4

S. 243

die hier!